UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ (UASLP)

FACULTAD DE INGENIERÍA

“INSTITUTO DE METALURGIA”

“Maestría en Ingeniería de Minerales”

“Apuntes de Matemáticas”

Elaborado por: Ing. González Olivares Miguel Ángel

Álgebra Lineal

1.1 Vectores:

a) Concepto del Vector y del Escalar.

b) Componentes y Longitud de un Vector

Ejemplos sobre Representación Gráfica y Determinación de Longitud.

c) Adición de vectores y Multiplicación por escalar, Vectores Unitarios.

Ejemplos sobre la aplicación de las propiedades de la adición de vectores y Multiplicación por un número escalar.

d) Producto Escalar (Producto Punto) y concepto de Ortogonalidad.

e) Producto Vectorial (Producto Cruz). Las propiedades de estos productos.

Ejemplos en los que se demuestre dichos productos (A.B) y (AxB) en coordenadas cartesianas.

1.2 Matrices:

a) Representación de Sistemas de Ecuaciones lineales. Elementos de una Matriz.

Adición de matrices y Multiplicación por escalares. Propiedades de la adición de Matrices. *Ejemplos*.

b) La Transpuesta de una Matriz. Matrices Simétricas y Antisimétricas.

c) Multiplicación de Matrices y sus propiedades

d) Resolución de sistemas de Ecuaciones Lineales por eliminación Gaussiana.

e) Determinantes

1.3 Funciones de una variable:

Derivadas:

a) Definición e Interpretación Gráfica de la Derivada.

b) Reglas de la Derivación para Suma, Productos , Cocientes y Potencias *(Ejemplos)*

c) Regla de la Cadena y derivada Implícita *(Ejercicios y ejemplos)*

d) Derivadas de Funciones Trigonométricas, Logarítmicas, Exponenciales y de funciones Inversas. *Ejemplos y Ejercicios.*

e) Máximos y Mínimos: Describir los criterios de Primera y Segunda Derivada para evaluar los puntos críticos. Problemas de Optimización de Parámetros.

1.4 Integrales

a) Inverso de la Diferenciación, definición de la Antiderivada

b) Fórmulas Fundamentales de Integración. *(Ejemplos)*

c) Métodos de Integración (Por cambios de variables, Sustitución Trigonométrica, Por partes)

d) Integral Definida.

1.5 Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Ecuaciones diferenciales exactas. Condición de exactitud

Condiciones iniciales

Método de Separación de variables

Factores integrantes

Aplicaciones de las E.D.O de primer grado.

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas.

Ecuaciones diferenciales homogéneas no lineales

Continuación….

Ecuaciones diferenciales de Bernouilli y de Riccati
Ecuaciones diferenciales de segundo orden.
Principio de superposición de superposición.
Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes.
La ecuación característica
Dependencia e independencia lineal de funciones.
Ecuaciones Lineales homogéneas de orden arbitrario
Ecuaciones Lineales homogéneas de orden arbitrario con coeficientes constantes.
Ecuaciones Lineales no homogéneas de orden arbitrario. Método de coeficientes indeterminados.

Bibliografía

Albert Rabenstein, (1973), Ecuaciones Diferenciales Elementales con Algebra Lineal (México).

Spiegel, M.R.,(1981), Ecuaciones Diferenciales Aplicadas, 3th ed, Prentice Hall
Hispanoamericana S.A., (México).

Boyce, W.E., DiPrima, R.C. (1997), Elementary Differential Equations, 6th ed., John Wiley (New York).

Kreyszig, E. (1999), Advanced Engineering Mathematics, 8th ed., John Wiley (New York).

Spiegel, M.R. (ed.) (1968), Mathematical Handbook of Formulas and Tables, McGraw-Hill (New York).

Dennis G. Zill and Michael R. Cullen. Differential Equations with Boundary-Value Problems. 5a. Ed.

Álgebra Lineal

Vectores:

a) Definición de un Vector y un Escalar:

En Física y Geometría existen cantidades, cada una de las cuales quedan completamente especificadas al dar solamente su magnitud, es decir su tamaño ó su número de unidades de acuerdo a alguna escala. Por ejemplo: La Densidad de un material, La Resistencia de un Resistor, La Masa de un cuerpo, la Carga del electrón, etc...

Cada una de estas cantidades se describen con un solo numero, a estas cantidades se les denominan **"Escalares".**

Pero también hay otras cantidades Físicas y Geométricas que no pueden describirse tan solo con mediante un número debido a que para su completa caracterización se necesita dar su Dirección así como también su Magnitud. Por ejemplo, Las Fuerzas son cantidades de este tipo, la Velocidad, la Aceleración entre otras. Estas cantidades se representan por medio de una Flecha ó un segmento rectilíneo dirigido.

A este segmento rectilíneo dirigido se le da el nombre de **"Vector"**, la longitud y dirección del segmento es la longitud y dirección del vector.

Álgebra Lineal

b) Componentes y Longitud de un Vector:

Ahora sabemos que un vector es un segmento rectilíneo dirigido, luego como este es un segmento recto debe de tener un inicio y un final los cuales son 2 puntos extremos, de ahí cada punto extremo tiene su representación en el Sistema de Coordenadas como (x, y, z). Sea el segmento $\overline{PQ}$ de donde el punto inicial es $P=(x_1,y_1,z_1)$ y el punto final es $Q=(x_2,y_2,z_2)$ de ahí los "**Componentes del vector**" $\overline{PQ}$ serán $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

Por definición la Longitud $\left|\overline{PQ}\right|$ del vector $\overline{PQ}$ es la distancia entre los puntos P y Q.

Por Pitágoras tenemos entonces para un Caso General que su "**Longitud**" es:

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Adición de Vectores y Multiplicación por Escalar

Adición de Vectores y Multiplicación por Escalar:

Dados 2 vectores **a** y **b** los cuales son representados de la siguiente manera:

$$a = (a_1, a_2, a_3) \qquad \text{y} \qquad b = (b_1, b_2, b_3)$$

Luego nuestro vector **c** Resultante de la suma de los 2 vectores se obtendrá por la adición de las componentes correspondientes de a y b, por lo tanto tendremos que el vector suma **c** es:

$$c = (c_1, c_2, c_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Esta adición de vectores **a** y **b** se puede representar colocando el punto inicial de **b** en el punto terminal de **a**, luego nuestra suma de los 2 vectores **a** y **b** es el vector **c** trazado desde el punto inicial de **a** al terminal de **b**.

Las propiedades en la Adición de vectores son las siguientes:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Adición de Vectores y Multiplicación por Escalar

Multiplicación por Escalares (números):

Sea **a** cualquier vector y **k** cualquier número real, entonces el valor de **ka** se define así:}

La longitud de ka, es $|k||a|$.

Si $a \neq 0$ y $k > 0$ entonces **ka** tiene la dirección de **a.**

Si $a \neq 0$ y $k < 0$ entonces **ka** tiene la dirección opuesta de **a.**

Si $a = 0$ ó $k = 0$ ó ambos son 0, entonces **ka** es igual a cero.

Ahora para un vector **a** de componentes $a = (a_1, a_2, a_3)$ entonces el Producto del vector por el escalar k será igual a: $ka = (ka_1, ka_2, ka_3)$

Algunas Propiedades en la Multiplicación de un Vector por un Escalar k**:**

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

$$(c + k)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + k\mathbf{a}$$

$$c(k\mathbf{a}) = (ck)\mathbf{a}$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios:

Son aquellos vectores cuya longitud es el valor de la unidad.

Dado un sistema de coordenadas cartesianas, ahora se puede representar un vector **a**, con los componentes a_1, a_2, a_3, como la suma de 3 vectores paralelos a los ejes de coordenadas.

Con este fin, a ese sistema de coordenadas se le asocian 3 vectores unitarios **i, j, k** que tienen las direcciones positivas de los ejes de coordenadas, entonces:

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

De donde **i, j, k** son los Vectores Unitarios:

$$i = (1,0,0) \quad j = (0,1,0) \quad k = (0,0,1)$$

Producto Escalar y Ortogonalidad

Producto Escalar (Producto Punto ó Producto Interior)

Es el producto realizado entre vectores, el Producto Escalar ó Producto Punto ó Producto Interior de 2 vectores a y b en el espacio tridimensional se escribe $a.b$ y se define de la siguiente manera.

$$a.b = |a||b| Cos\beta \qquad \text{Cuando } a \neq 0, b \neq 0$$

De donde:

$|a|, |b|$ Son las longitudes de los 2 vectores.

β Es el ángulo entre los 2 vectores

$$a.b = 0 \quad \text{Cuando } a = 0 \text{ ó } b = 0 \text{ ó } \beta = 90^o \text{ (entre } 0^o \text{ y } 180^o)$$

El valor del Producto Punto es un Escalar, por eso se le llama Producto Escalar.

Ortogonalidad:

Dos vectores diferentes de cero son ortogonales (perpendiculares) si y solo si su producto interior (producto punto) es cero.

Propiedades del Producto Punto

Linealidad: $$\left[k_1 a + k_2 b\right].c = k_1 a.c + k_2 b.c$$

Simetría $$a.b = b.a$$

Distributividad $$(a+b).c = a.c + b.c$$

Desigualdad de Schwartz $$|a.b| \leq |a||b|$$

Si se representan los vectores a y b en términos de componentes digamos:

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \qquad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

Luego el producto Punto será:

$$a.b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$ **(Importante)**

Dado que i, j, k son vectores unitario se tiene:

$$i.i = 1 \qquad j.j = 1 \qquad k.k = 1$$

Y además por ser Ortogonales tenemos:

$$i.j = 0 \qquad j.k = 0 \qquad k.i = 0$$

Producto Vectorial (Producto Cruz)

Producto Vectorial (Producto Cruz)

Sean los vectores **a** y **b**. Si **a** y **b** tienen la misma dirección ó sus direcciones son opuestas ó uno de estos vectores es cero, entonces v = axb = 0

En cualquier otro caso, v=axb es el vector cuya longitud es igual al Área del paralelogramo que tiene a **a** y **b** como lados adyacentes u cuya dirección es perpendicular tanto a **a** como a **b**, y es tal que **a, b, v** en ese orden forman una Terna derecha.

El termino Terna derecha proviene del hecho de que los vectores **a, b** y **c** en este orden toman el mismo tipo de orientación que los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha.

Propiedades del Producto Cruz.

Sean **axb =v** y **bxa=w**, entonces por definición $|v| = |w|$ y, en el orden en el que **b, a** y **w** forman una terna derecha, debe tenerse que **v=-w**, luego esto implica que:

$$bxa = -(axb)$$

Luego la Multiplicación Cruz de vectores no **es Conmutativa sino Anticonmutativa**

Propiedades del Producto Cruz

Para cualquier constante k tenemos:

$$(ka)xb = k(axb) = ax(kb)$$

La Multiplicación Cruz **es Distributiva** con respecto a la adición de vectores:

$$ax(b+c) = (axb) + (axc)$$

$$(a+b)xc = (axc) + (bxc)$$

La Multiplicación Cruz **no es asociativa:**

$$ax(bxc) \neq (axb)xc$$

<u>Producto Vectorial en términos de una Fuerza</u>:

Con respecto a un sistema derecho de coordenadas cartesianas, supongamos que **a** tiene los componentes $\mathbf{a_1}$**,** $\mathbf{a_2}$ **y** $\mathbf{a_3}$ y **b** los componentes $\mathbf{b_1}$**,** $\mathbf{b_2}$ **y** $\mathbf{b_3}$ entonces:

$$axb = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

También se puede obtener por medio de Determinantes.

Matrices

Matrices:

Las Matrices son arreglos rectangulares ó cuadradas de números encerrados por corchetes. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1.5 & 4 \\ -3 & 0.66 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Un arreglo Rectangular de números (reales ó complejos) de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \\ \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \\ a_{mi} & a_{m2} & \ldots & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix}_{mn}$$

Se le llama **Matriz**. Los números $a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots\ldots a_{mn}$ son los elementos de la Matriz.

Las Líneas Horizontales reciben el nombre de Filas ó reglones ó vectores reglón de la Matriz.

Las Líneas Verticales reciben el nombre de Columnas o vectores Columna de la Matriz.

Cuando una matriz tiene "**m**" filas y "**n**" columnas se dice que la matriz es de orden **m** por **n** = **(m x n)**

Representación de Sistemas de Ecuaciones Lineales por Matrices

Las matrices se representan en relación con Transformaciones Lineales o Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Por ejemplo:

Sean las 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

$$20x_1 + 3x_2 = 3$$
$$0.5x_1 + 7x_2 = 5$$

Luego los coeficientes 20, 3, 0.5, y 7 se les puede representar en la matriz tal como se presentan en la ecuación.

$$\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ 0.5 & 7 \end{bmatrix}$$

Finalmente nuestro sistema de Ecuaciones puede ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ 0.5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Para 3 Ecuaciones con 3 incógnitas (x, y, z) tendríamos la siguiente representación:

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 7z &= 2 \\ 6x + 5y + 9z &= -4 \\ 4x + 5y + 7z &= 10 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Adición de Matrices y Multiplicación por Escalares (números)

La **Adición de Matrices** se define "solo para aquellas que tienen el mismo número de filas (reglones) y columnas".

La Suma de 2 matrices **A** y **B**, de orden (mxn), donde $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ y $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]$ es la Matriz $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]$ de orden (mxn) con elementos.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots.m \\ j = 1,2,\ldots.n \end{array}$$

y se puede representar así:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Propiedades de la Adición de Matrices:

Es bastante semejante a la adición con números reales.

$$\mathbf{A + B = B + A}$$

$$\mathbf{(U + V)+W = U + (V + W)}$$

$$\mathbf{A + 0 = A}$$

$$\mathbf{A + (-A) = 0}$$

Multiplicación de Matrices por Escalares

La **Multiplicación de Matrices por Escalares (números)** se define como el producto de una matriz A de orden (mxn) por un escalar k (un número) y se denota mediante **A**k ó k**A** y es una matriz de orden (mxn) que se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz **A** por el número escalar “k” es decir:

$$k\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,k = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & \ldots. & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots. & \ldots. & ka_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots. & \ldots. & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedades de Multiplicaciones de Matrices (A, B) por Escalares (c y k)

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$(c+k)A = cA + kA$$

$$c(kA) = (ck)A$$

$$1A = A$$

Transpuesta de una Matriz

Transpuesta de una Matriz:

La Transposición de una Matriz se define como la Transpuesta A^T de una matriz $A = \left[a_{jk}\right]$ de orden (mxn), la cual es la matriz de orden (nxm) que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A , es decir el j-ésimo reglón de A se convierte en la j-ésima columna de A.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots \\ \dots & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{mi} & a_{m2} & \dots & \dots. & a_{mn} \end{bmatrix}_{mn} \quad \text{Su Transpuesta será:} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & \dots. & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots \\ \dots & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots. & a_{mn} \end{bmatrix}_{nxm}$$

Luego nosotros podemos probar que:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

Matrices Simétricas y Antisimétricas

Matrices Simétricas y Antisimétricas:

Se dan solo en Matrices Cuadradas (# filas = #Columnas).

Se dice que una Matriz Cuadrada Real **A**=$\left[a_{jk}\right]$ es **"Simétrica"**, si esta matriz es igual a su Transpuesta.

Entonces: Será Simétrica si: $A^T = A$ es decir $a_{kj} = a_{jk}$ j =k = 1, 2, 3…n

Se dice que una Matriz Cuadrada Real **A**=$\left[a_{jk}\right]$ es **"Antisimétrica",** si ésta matriz es igual a la Negativa de su Transpuesta.

Será Antisimétrica si: $A^T = -A$ es decir $a_{kj} = -a_{jk}$ j = k = 1, 2, 3…n

Multiplicación de Matrices y sus Propiedades

Multiplicación de Matrices y sus Propiedades:

Ahora definiremos la Multiplicación de una matriz por otra matriz.

Sea **A** = $\left[a_{ij}\right]$ una matriz de orden de **(mxn)** luego para que pueda darse la multiplicación de 2 matrices, la otra matriz **B** = $\left[b_{ij}\right]$ debe ser del orden de **(nxp)** (Ver que tanto la primera matriz deben de tener **n** columnas y la segunda matriz deberá tener **n** filas ó reglones) como la segunda matriz será del orden de **(nxp)**, nos dará como producto una matriz **C** de orden **(mxp)**.

Por ejemplo:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4x3} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3x3} \quad \to AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{bmatrix}_{4x3}$$

De donde:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots.$$

$$c_{43} = a_{41}b_{13} + a_{42}b_{23} + a_{43}b_{33}$$

Multiplicación de Matrices y sus Propiedades

Propiedades de la multiplicación de Matrices:

La multiplicación de Matrices es Asociativa y Distributiva respecto a la adición de Matrices, es decir:

$$(kA)B = k(AB) = A(kB)$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$C(A + B) = CA + CB$$

Donde k es cualquier número.

La multiplicación de Matrices **no es Conmutativa**, esto es si A y B son matrices tales que tanto AB como BA estan definidas entonces, en general:

$$AB \neq BA$$

En general **no se cumple la Ley de Cancelación**, es decir:

AB =0 no necesariamente implica que A = 0 ó B = 0

Transposición del producto:

La Transpuesta de un producto es igual al producto de los factores transpuestos tomados en orden inverso.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Determinante de una Matriz

Determinante de una Matriz:

En muchas aplicaciones de Álgebra Lineal hacia la geometría y el análisis el concepto de Determinantes juega un papel importante. En el presente tema estudiaremos las propiedades básicas de de los determinantes. Tener en cuenta que se puede realizar determinantes solo para Matrices Cuadradas.

Determinantes de Orden 2: Esta definido mediante la siguiente formula

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Notar que una Matriz se representa por corchetes mientras que un Determinante se representa por barras.

Determinantes de Orden 3: Se pueden expresar en términos de Determinantes de Segundo Orden.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Propiedades de Determinante de una Matriz (Orden 3)

Propiedades Generales de las Matrices de Tercer Orden:

a) El valor de un Determinante no se altera si se escriben sus filas como columnas en el mismo orden.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -12$$

b) Si se intercambian dos filas ó dos columnas de un Determinante el valor de este se multiplica por -1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

c) Puede colocarse un factor de los elementos de cualquier fila ó columna antes del determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & -9 & 2 \\ -1 & 12 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2.3 & 1 \\ 3 & -3.3 & 2 \\ -1 & 4.3 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Propiedades de Determinante de una Matriz (Orden 3)

d) Si cada uno de los elementos de una fila ó columna de un Determinante se expresa como un Binomio, el determinante puede escribirse como la suma de 2 determinantes.

$$\begin{vmatrix} 4x+3 & 2 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ 2x-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x & 2 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ 2x & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

e) Si se aplica la regla del producto de una Derivación se obtiene la propiedad siguiente: "Si los elementos de un determinante son Funciones Diferenciables de una variable, la Derivada del determinante puede escribirse como la suma de 3 determinantes".

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^1 & g^1 & h^1 \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p^1 & q^1 & r^1 \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u^1 & v^1 & w^1 \end{vmatrix}$$

De donde los apóstrofos denotan derivadas con respecto a x.

Derivadas

La Derivada:

La Derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a x, se define por el siguiente límite:

$$f^1(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Siempre que exista.

Este límite se denomina también cociente instantáneo de incrementos (ó simplemente cociente de incrementos) de **y** con respecto de **x** en el punto $x = x_0$.

$$f^1(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Un gran ejemplo es el de la “Velocidad Instantánea”. Pues la velocidad $v_{(t)}$ es igual a la derivada $f^1(t)$ donde $f(t)$ es la función de la posición.

Sea la Función Posición f descrita por la ecuación: $f(t) = 144t - 16t^2$

Luego la Derivada f^1 es una nueva función (Velocidad) dado por: $f^1(t) = 144 - 32t$

Derivadas

Esta respuesta de Velocidad la encontramos por la definición de Derivada es decir.

$$f^1(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Sabemos que: $f(t) = 144t - 16t^2 \quad \to f(t+h) = 144(t+h) - 16(t+h)^2$

Luego $f^1(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h} = 144 - 32t$

Mediante la Definición de Límites, demostrar que la Derivada de:

$f(x) = c$ es 0

$f(x) = mx + b$ es m

$f(x) = \sqrt{2x+1}$ es $\dfrac{1}{(2x+1)^{1/2}}$

Derivadas

Reglas de la Derivación para la Suma, Productos, Cocientes y Potencias

<u>El álgebra de las Derivadas</u>:

Teorema: Si f y g son 2 funciones definidas sobre un intervalo común. Y cada punto f y g tienen una derivada, al igual se dará para la suma $f+g$, la diferencia $f-g$, el producto $f.g$ y el cociente f/g (Observación: Para f/g nosotros necesitamos poner mucha atención en la función g porque este no debe de ser cero en el punto en cuestión). Luego las derivadas de estas funciones están dadas por las siguientes formulas:

Suma $(f+g)^1 = f^1 + g^1$

Resta $(f-g)^1 = f^1 - g^1$

Producto $(f.g)^1 = f.g^1 + g.f^1$

Cociente $\left(f/g\right)^1 = \dfrac{g.f^1 - f.g^1}{g^2}$ en un punto de x tal que $g(x) \neq 0$

Algunas Fórmulas de Derivación

Algunas Fórmulas de Derivación:

En las formulas siguientes u, v y w son funciones derivables de x.

a) $\frac{d}{dx}(c) = 0$ Siendo c una constante.

b) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

c) $\frac{d}{dx}(u + v + ... + w) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + ... \frac{d}{dx}(w)$

d) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$

e) $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{d}{dx}(w) + uw\frac{d}{dx}(v) + vw\frac{d}{dx}(u)$

f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}.\frac{d}{dx}(u)$ $\quad / c \neq 0$

g) $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = c\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{c}{u^2}.\frac{d}{dx}(u)$

Algunas Fórmulas de Derivación

h) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{d}{dx}(u) - u\dfrac{d}{dx}(v)}{v^2} \quad / v \neq 0$

i) $\dfrac{d}{dx}\left(x^m\right) = mx^{m-1}$

j) $\dfrac{d}{dx}\left(u^m\right) = mu^{m-1}\dfrac{d}{dx}(u)$

Ejemplos:

a) Si $f(x) = 2 + x - x^2$ calcule $f^1(0), f^1(1), f^1(-10)$

b) Calcular las derivadas de:

$f(x) = x^2 + 3x + 2$

$f(x) = x^2 - 3x$

$f(x) = x^4.senx$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 1}$

Derivada Implícita

Función Implícita:

Cuando una ecuación, definida en el campo de variación de sus variables se escribe en la forma $f(x,y)=0$ se dice que y **es una Función Implícita de x**. Por ejemplo:

$$xy+x-2y-1=0\text{, siendo } x\neq 2 \text{ define la función } y=\frac{1-x}{x-2}\quad .$$

$$4x^2+9y^2-36=0 \text{ Define la función } y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \text{ cuando } |x|\leq 3 \text{ e } y\geq 0$$

Para hallar la Derivada y^1 se puede seguir el siguiente procedimiento:

a) Primeramente despejar y , si es posible, y derivar con respecto a x. Este procedimiento se debe evitar, a menos que se trate de una ecuación bien sencilla.

b) Derivar la ecuación dada con respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x, y despejar y^1. Esta forma de efectuar derivación se llama Derivación Implícita.

Derivada Implícita

Ejemplo

Hallar y^1 en la ecuación $xy + x - 2y - 1 = 0$

Tenemos : $$x.\frac{d}{dx}(y) + y.\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x) - 2.\frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$x.y^1 + y + 1 - 2y^1 - 0 = 0$$

Finalmente: $$y^1 = \frac{1+y}{2-x}$$

Más ejemplos en la Pizarra:

Mediante la Derivación Implícita derivar lo siguiente:

a) $x^2 + y^2 = 16$

b) $y = \cos(x - y)$

c) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^3 + y^3$

Derivadas de Funciones Trigonométricas

Derivadas de las Funciones Trigonométricas:

Sea u una función derivable de x, en estas condiciones tenemos:

a) $\dfrac{d}{dx}(senu) = \cos u\,\dfrac{du}{dx}$

b) $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -senu\,\dfrac{du}{dx}$

c) $\dfrac{d}{dx}(tagu) = \sec^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

d) $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

e) $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u.tagu\,\dfrac{du}{dx}$

f) $\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u.\cot u\,\dfrac{du}{dx}$

Ejemplitos:

Hallar la Primera y Segunda derivadas de:

$y = sen3x + \cos 2x \qquad y = tag^2 x \qquad y = tag^2(3x-2)$

Derivadas de Funciones Logarítmicas y Exponenciales

Derivadas de las Funciones Logarítmicas y Exponenciales:

Sea u una función derivable de x, en estas condiciones tenemos:

Recordando antes lo siguiente:

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, y si $a^y = x$ entonces $y = \log_a x$

Reglas de Derivación:

a) $\dfrac{d}{dx}\left(\log_a u\right) = \dfrac{1}{u}\log_a e\dfrac{du}{dx}$, $a > 0, a \neq 1$

b) $\dfrac{d}{dx}\left(\ln u\right) = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u \ln a\dfrac{du}{dx}$, $(a > 0)$

Derivadas de Funciones Logarítmicas y Exponenciales

d) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{u}\right)=e^{u}\dfrac{du}{dx}$

Ejemplitos:

Derivar:

$y=\log_a(3x^2-5)$ $\qquad$ $y=\ln^2(x+3)$ $\qquad$ $y=\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}$

Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas:

La función inversa de $x = seny$ es $y = arcsenx$ ó bien $sen^{-1}x$. El dominio de definición del $arcsenx$ es $-1 \leq x \leq 1$, es decir, el campo de variación de y; el campo de variación de $arcsenx$ es el conjunto de números reales, es el dominio de la definición de sen y. El dominio de definición y el campo de variación de las restantes funciones trigonométricas inversas se establecen de la forma análoga.

$y = arcsenx$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = arctagx$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Reglas de Derivación: Sea u una función derivable de x; entonces:

$$\frac{d}{dx}(arcsenu) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(arc\cot u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(arc\sec u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(arctag u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(arc\csc u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

Ejemplitos:

Derivar:

$$f(x) = arc\cot\frac{1+x}{1-x}$$

$$y = arcsen(2x-3)$$

Máximos y Mínimos

Función Creciente y Decreciente:

Una función $f(x)$ es **Creciente** en un punto $x = x_0$ cuando, dado un h positivo e infinitamente pequeño, se verifica

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h).$$

Una función $f(x)$ es **Decreciente** en un punto $x = x_0$ cuando, dado un h positivo e infinitamente pequeño, se verifica

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h).$$

Si $f^1(x_0) > 0$ la función $f(x)$ es **Creciente** en el punto $x = x_0$, y si $f^1(x_0) < 0$ es **Decreciente** en dicho punto, además si $f^1(x_0) = 0$ diremos que la función es **Estacionaria** en el punto $x = x_0$

Para determinar los Máximos (Mínimos) relativos de una función $f(x)$ continua, así como su Derivada se sigue los **Criterios de la Primera y Segunda Derivada**.

Máximos y Mínimos

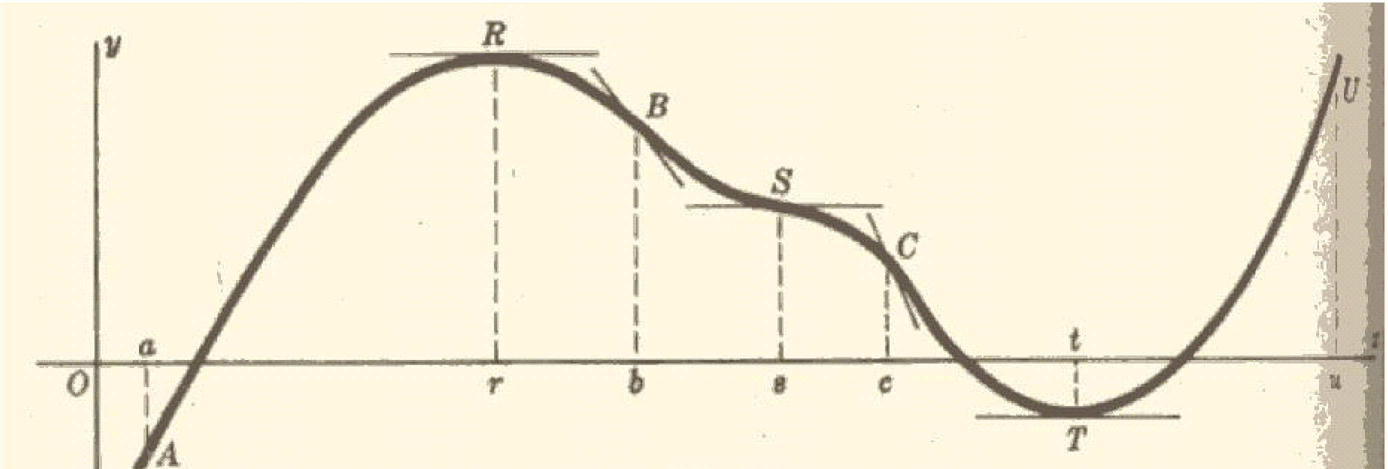

Fig. 8-1

En la Figura, la función $y = f(x)$ es **Creciente** en los intervalos $a < x < r$ y $t < x < u$, **Decreciente** en el rango de $r < x < t$ y **Estacionaria** en los puntos $x = r, x = s, x = t$

Los valores de $x(r,s,t)$ para los cuales la función $f(x)$ es Estacionaria $\left(f(x)^1 = 0\right)$reciben el nombre de "Valores Críticos"y los puntos correspondientes de la curva (R, S, T) el de Puntos Críticos.

Máximos y Mínimos

Criterio de la Primera Derivada:

a) Resolver la ecuación $f^1(x_0) = 0$ para calcular los Valores Críticos.

b) Representar estos valores Críticos sobre el eje de las abscisas de un Sistema Coordenado, de esta manera hemos establecido un cierto número de intervalos.

c) Determinar el signo de $f^1(x)$ en cada uno de los intervalos anteriores.

d) Para cada uno de los Valores Críticos $x = x_0$

$f(x)$ Tiene un Máximo $[= f(x_0)]$, si $f^1(x)$ pasa de + a –

$f(x)$ Tiene un Mínimo $[= f(x_0)]$, si $f^1(x)$ pasa de - a +

$f(x)$ No tiene ni máximo ni mínimo en el punto $x = x_0$, si $f^1(x)$ no cambia de signo.

Observación: Una función puede tener máximos ó mínimos $[= f(x_0)]$ aunque no exista $f^1(x_0)$. Los valores $x = x_0$, para los cuales $f(x)$ esta definida pero no existe $f^1(x)$ también reciben el nombre de Valores Críticos u junto con aquellos otros para los cuales $f^1(x) = 0$ han de servir para establecer los intervalos.

Máximos y Mínimos

Puntos de Inflexión: Es un punto en el cual la curva pasa de Cóncava a Convexa ó viceversa. Una curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $x = x_0$

Si $f^{11}(x_o) = 0$ ó no esta definida.

Si $f^{11}(x)$ cambia de signo en un entorno de $x = x_0$ (Esto ultimo equivale a $f^{111}(x_0) \neq 0$ cuando existe la tercera derivada $f^{111}(x_0)$.

Criterio de la Segunda Derivada:

a) Resolver la ecuación $f^{1}(x_0) = 0$ para calcular los Puntos Críticos.

b) Para cada uno de los Valores Críticos $x = x_0$

$f(x)$ Tiene un Máximo $[= f(x_0)]$, si $f^{11}(x_0) < 0$

$f(x)$ Tiene un Mínimo $[= f(x_0)]$, si $f^{11}(x_0) > 0$

Si $f^{11}(x_0) = 0$ ó se hace infinito, nada se puede afirmar.

Máximos y Mínimos

Ejemplos:

1) Dada la función $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

Calcular:

a) Los puntos Críticos.

b) Intervalos en los cuales y es creciente y decreciente.

c) Máximos y Mínimos de y.

2) Dada la función $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, **Calcular**

a) Intervalos en los que y es Creciente y Decreciente.

b) Máximos y Mínimos de y.

Integrales

La Integral:

En muchos problemas se conoce la Derivada de una función y el objetivo es hallar la función misma, por ejemplo un Sociólogo que conoce el ritmo al que esta creciendo la población puede desear utilizar esta información para predecir niveles futuros de población, un Físico que conoce la velocidad de un cuerpo que se mueve puede desear calcular la posición futura de un cuerpo, un Economista que conoce el ritmo de inflación puede desear estimar los precios futuros.

El proceso de Obtención de una función a partir de su derivada se llama **Calculo de Primitivas ó Integración.**

Una función F cuya derivada es igual a f se dice que es una Primitiva ó Integral Indefinida de f.

Luego es habitual escribirlo de esta manera:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Integrales

De donde el símbolo $\int$ se llama Signo Integral e indica que va hallar la Primitiva de la función que le sigue.

Las siguientes 2 hojas (Word) nos resumen la Integrales más conocidas que hay.

Integrales por Partes

Integral por Partes:

Sean u y v funciones derivables de x. En estas condiciones,

$$d(u.v) = udv + vdu$$

$$udv = d(u.v) - vdu$$

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

Para aplicar la ultima ecuación en la practica, se separa el integrando en 2 partes, una de ellas se iguala a u y la otra junto con dx, a dv. (Por esta razón, este método se denomina Integración por Partes).

Se recomienda para ello tener en cuenta los siguientes criterios:

a) La parte que se iguala a dv debe de ser fácilmente Integrable.

b) $\int vdu$ no debe ser mas complicada que $\int udv$.

Integrales por Partes

Por ejemplo:

Integrar $\int x^3 e^{x^2} dx$

Tenemos que aplicar acá Integral por Partes:

$$u = x^2 \qquad \rightarrow du = 2xdx$$

$$dv = xe^{x^2} dx \quad \rightarrow v = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x} \ dx = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)$$

Luego:

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}.x^2.e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{X^2}.2xdx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}.x^2.e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Integrales por Partes

Integrar $\int \ln(x^2+2)dx$

$u = \ln(x^2+2) \quad \rightarrow du = \dfrac{2xdx}{\left(x^2+2\right)}$

$dv = dx \qquad \rightarrow v = x$

Luego:

$$\int \ln(x^2+2)dx = x.\ln(x^2+2) - \int \frac{2x^2dx}{\left(x^2+2\right)}$$

$$\int \ln(x^2+2)dx = x.\ln\left(x^2+2\right) - \int\left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)dx$$

$$\int \ln(x^2+2)dx = x.\ln\left(x^2+2\right) - 2x + 2\sqrt{2}arctag\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Integración por Sustitución Trigonométrica

Integración por Sustitución Trigonométrica:

Las Sustituciones trigonométricas nos permiten reemplazar los binomios $a^2 + x^2$, $a^2 - x^2$ y $x^2 - a^2$ por términos cuadrados simples y, de este modo transformar numerosas integrales que contienen raíces cuadradas en otras integrales que pueden ser evaluadas directamente.

Las 3 Sustituciones Básicas:

Las Sustituciones más comunes son:

Con $x = a\tan\theta$ $\qquad a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta$

Con $x = a sen\theta$ $\qquad a^2 - x^2 = a^2 - a^2 sen^2\theta = a^2(1 - sen^2\theta) = a^2\cos^2\theta$

Con $x = a\sec\theta$ $\qquad x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta$

Luego tenemos el siguiente resumen:

1. $x = a\tan\theta$ **sustituye** $a^2 + x^2$ **por** $a^2\sec^2\theta$

2. $x = a sen\theta$ **sustituye** $a^2 - x^2$ **por** $a^2\cos^2\theta$

3. $x = a\sec\theta$ **sustituye** $x^2 - a^2$ **por** $a^2\tan^2\theta$

Integración por Sustitución Trigonométrica

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

Luego establecemos del problema:

$$x = 2\tan\theta \qquad dx = 2\sec^2\theta d\theta \ ,$$

Entonces:

$$4+x^2 = 4+4\tan^2\theta = 4(1+\tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$$

Luego:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{|\sec\theta|} = \int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$\rightarrow \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

Integración por Sustitución Trigonométrica

Realizar la Integral:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$x = 3sen\theta$ **,** $dx = 3\cos\theta d\theta$

$9 - x^2 = 9(1 - sen^2\theta) = 9\cos^2\theta$

Entonces:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9sen^2\theta.3\cos\theta d\theta}{|3\cos\theta|} = 9\int sen^2\theta d\theta$$

Luego sabemos lo siguiente:

$$9\int sen^2\theta d\theta = 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{9}{2}\left[\theta - \frac{sen2\theta}{2}\right] + C$$

$$\rightarrow \frac{9}{2}\left[sen^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}.\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right] + C$$

Integral Definida

Integral Definida:

El símbolo $\int_a^b f(x)dx$ se lee **"Integral Definida"** de $f(x)$ con respecto a x, desde $x = a$ a

$x = b$

La función $f(x)$ recibe el nombre de Integrando y a , b el de limites Inferior y Superior de Integración, respectivamente.

Propiedades de la Integral Definida:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo de Integración $a \le x \le b$:

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

c) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, siendo c una constante.

d) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx$

Integral Definida

e) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, cuando $a < c < b$

f) Si $F(u) = \int_a^u f(x)dx$, se verifica $\frac{d}{du}F(u) = f(u)$

Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

Regla de Barrow. Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $a \le x \le b$, y $F(x)$ es la primitiva ó integral definida de $f(x)$, se verifica

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplos:

a) Sea $f(x) = c$, una constante, y $F(x) = cx$, tendremos $\int_a^b c\,dx = cx\Big|_a^b = c(b-a)$

b) Sea $f(x) = x$, y $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, tendremos $\int_0^5 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = 12.5$

c) Sea $f(x) = x^3$, y $F(x) = \frac{1}{4}x^4$, tendremos $\int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$

Integral Definida

Cálculo de Áreas Planas por Integración:

Los pasos a tener en cuenta para plantear la integral definida que proporciona el valor del Área a calcular son:

a) Trazar un diagrama en el que figuren:

- El Área a determinar.
- Una franja representativa.

b) Aplicar la regla de Barrow ó Teorema Fundamental del cálculo Integral.

Ejemplo:

a) Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y las ordenadas en los puntos $x = 1$ y $x = 3$

b) Hallar el área comprendida entre el eje x y la parábola $y = 4x - x^2$

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales

Una Ecuación Diferencial es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una ó más variables. Si la función desconocida depende de una sola variable $f(x)$ (de tal modo que las derivadas son Derivadas Ordinarias) la ecuación se llama una Ecuación Diferencial Ordinaria.

Si la función desconocida depende de más de una variable $U(x, y, z...)$ (de tal modo que las derivadas son derivadas Parciales) la ecuación de llama Ecuación Diferencial Parcial.

Ejemplos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} - 12x = 0 \qquad \text{ó} \qquad y'' - 5y' - 12x = 0 \qquad \text{E.D.Ordinaria.} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - 12\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = T \qquad \text{E.D.Pacial} \quad (2)$$

Orden de las Ecuaciones Diferenciales

El Orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Por ejemplo la ecuación (1) es de Segundo Orden.

Por ejemplo las ecuaciones (2) son de Primer y Segundo Orden respectivamente.

Ahora que orden tendrá esta ecuación?.

$$(y')^2 + xy' - y = 0$$

Respuesta: es de …….... Orden.

Ecuaciones Diferenciales Lineales ó no lineales

Ecuaciones Diferenciales Lineal y No lineal:

“Para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”

Una ecuación diferencial ordinaria lineal será es una ecuación que puede ser escrita en la forma siguiente:

$$a_o(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ...+ a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

De donde F(x) y los coeficientes $a_o(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ son funciones dadas de x y $a_o(x)$ no es idéntica a cero.

Una ecuación diferencial que no puede escribirse en la forma anterior se llama Ecuación Diferencial No Lineal.

“Ahora ya estamos preparados para el Desarrollo de los Primeros Problemas propuestos”

Origen de las Ecuaciones Diferenciales

Origen de las Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación Diferencial es una ecuación que contiene derivadas por ejemplo:

1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3) $xy^1 + y = 3$

4) $y^{111} + 2(y^{11})^2 + y^1 = \cos x$

5) $(y^{11})^2 + (y^1)^3 + 3y = x^2$

6) $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$

7) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

Si hay una sola variable independiente como en las ecuaciones del 1 al 5, las derivadas son Ordinarias y su ecuación se denomina **Ecuación Diferencial Ordinaria**.

Si hay 2 ó más variables independientes como la ecuación 6 ó 7 se llaman **Ecuaciones Diferenciales Parciales.**

Origen de las Ecuaciones Diferenciales

El **orden** de una Ecuación Diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que interviene en ella.

El **grado** de una ecuación diferencial que puede escribirse como un polinomio respecto a las derivadas es el grado de la derivada de mayor orden que interviene en ella.

Todas las ecuaciones de los ejemplo anteriores son de primer grado excepto la #5 que es de segundo grado.

Soluciones de las ecuaciones diferenciales:

El problema en las ecuaciones Diferenciales Elementales consiste esencialmente en encontrar la Primitiva que dio origen a la ecuación.

Una solución particular de una ecuación Diferencial se obtiene de la primitiva dando valores definidos a las constantes arbitrarias.

Ecuación Diferencial de Primer Orden

<u>Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden</u>:

Sea la ecuación: $$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

Cada miembro de la izquierda es lineal tanto en la variable dependiente como en su derivada, se llama ecuación lineal de primer orden, por ejemplo:

$\frac{dy}{dx} + 3xy = senx$ es una ecuación lineal, mientras que $\frac{dy}{dx} + 3xy^2 = senx$ no lo es

Como

$$\frac{dy}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = \frac{dy}{dx}.e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + yP(x)\right)$$

De donde $e^{\int P(x)dx}$ es un factor integrante, y su Primitiva es

$$e^{\int P(x)dx} = \int Q(x).e^{\int P(x)dx} + C$$

Ecuación Diferencial Lineal de Primer orden

La Ecuación de Primer Orden Lineal:

Una ecuación que puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

De donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de x

Para estos tipos de ecuaciones el Factor Integrante es:

$$F.Integrante : e^{\int Pdx}$$

Multiplicando en ambos miembros por el Factor Integrante tenemos lo siguiente:

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + P(x)ye^{\int Pdx} = Q(x)e^{\int Pdx}$$

Ecuación Diferencial Lineal de Primer orden

Lo cual es equivalente a:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)=Q(x)e^{\int Pdx}$$

De ahí finalmente tenemos

$$d\left(ye^{\int Pdx}\right)=Q(x)e^{\int Pdx}dx$$

Integrando tenemos:

$$\underline{ye^{\int Pdx}=\int Q(x)e^{\int Pdx}dx+c}$$

Ecuación Diferencial Exacta

Ecuaciones Diferenciales Exactas.

Si $\quad Mdx + Ndy = 0 \quad$ es exacta entonces hay una función $U(x, y)$ tal que:

$$Mdx + Ndy = dU$$

Ahora de Cálculo Elemental tenemos:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Entonces

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = N$$

Diferenciando las ecuaciones de arriba tenemos:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Condiciones de Exactitud

Ahora para que sea “**Exacta**” se de cumplir lo siguiente:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ecuación Diferencial de Bernoulli

Ecuación de Bernoulli:

A una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x) \qquad \text{ó} \quad \text{bien} \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-n+1}P(x) = Q(x)$$

Se reduce a la forma

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

A saber: $\quad \dfrac{dv}{dx} + v\{(1-n)P(x)\} = (1-n)Q(x) \quad$ mediante la transformación

$$y^{-n+1} = v \qquad\qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$$

Ecuación de Bernoulli

Resolver:

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5 \qquad \textbf{ó bien} \qquad y^{-5}\frac{dy}{dx} - y^{-4} = x$$

La transformación: $y^{-4} = v,\qquad y^{-5}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{dv}{dx}$ reduce a la ecuación en:

$$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} - v = x \qquad \text{ó} \qquad \frac{dv}{dx} + 4v = -4x$$

Un factor integrante es: $e^{\int 4dx} = e^{4x}$

Entonces: $ve^{4x} = -4\int xe^{4x}dx \; = \; -xe^{4x} + \dfrac{1}{4}e^{4x} + C$

$$y^{-4}e^{4x} = -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C \qquad \text{ó} \qquad \frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$$

Factores Integrantes

Ecuaciones Diferenciales Inexactas:

Para las ecuaciones que no son exactas, nosotros podemos hacerlas Exactas mediante un Factor Integrante μ

Considerando en el caso en que $Mdx + Ndy = 0$ no es separable ó exacta, luego a este multiplicamos por el factor integrante μ (desconocido por el momento).

Luego tenemos: $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ ahora ya es exacta, entonces se debe de cumplir:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Ahora podrá haber 2 casos los cuales son los siguientes:

Factores Integrantes

Si μ es función solo de x, luego:

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Esto arreglado llega a ser:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad \rightarrow \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\partial x$$

Si el factor $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ es función solo de x entonces la llamaremos $f(x)$

Ahora tenemos entonces:

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = f(x)\partial x \qquad \text{de ahí tenemos} \qquad \int\left(\frac{\partial \mu}{\mu}\right) = \int f(x)dx$$

Factores Integrantes

$$Ln(\mu) = \int f(x)dx$$

Finalmente nuestro Factor de Integración es:

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

Factores Integrantes

Si μ es función solo de y, luego:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial N}{\partial x} = \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = M \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

De ahí tenemos finalmente:

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy$$

Si el factor $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ es función solo de y entonces la llamaremos $g(y)$

Factores Integrantes

Ahora tenemos entonces:

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = g(y)\partial y \qquad \text{de ahí tenemos} \qquad \int \left(\frac{\partial \mu}{\mu} \right) = \int g(y)dy$$

$$Ln(\mu) = \int g(y)dy$$

Finalmente nuestro Factor de Integración es:

$$\mu = e^{\int g(y)dy}$$

Problemas de Matemáticas

Universidad Autónoma San Luis Potosí (UASLP)

Maestría en Ingeniería de Minerales

Temas

1. Vectores.
2. Matrices
3. Derivadas
4. Máximos y Mínimos
5. Derivadas Parciales, Gradiente de una Función
6. Máximos y Mínimos
7. Integrales
8. Ecuaciones Diferenciales (Exactas, Inexactas,Factores de Integración, Separación de variables, lineales, no lineales, de Bernoulli, de Riccati…..)

Vectores

1) Busque los componentes del vector **v** con los puntos iniciales $P:(x_1,y_1,z_1)$ y los puntos finales $Q:(x_2,y_2,z_2)$, Represéntelo Gráficamente, y además encuentre su magnitud.

a) $P:(1,0,0), Q:(4,2,0)$

b) $P:(4,0,-1), Q:(1,0,2)$

c) $P:(3,-2,1), Q:(1,2,-4)$

d) $P:(-1,-1,-1), Q:(3,0,0)$

e) $P:(-1,7,5), Q:(-1,7,5)$

2) En cada caso se dan los componentes v_1, v_2, v_3 de un vector **v** y un punto inicial particular P. Hállese el punto terminal correspondiente y la longitud de **v.**

a) $1,-1,0$ $P:(2,1,0)$

b) $6,2,1$ $P:(-6,-2,-1)$

c) $3,1,2$ $P:(3,1,2)$

d) $0,0,0$ $P:(1,-1,-2)$

e) $2,-4,6$ $P:(4,-2,6)$

Vectores

3) Sean $a = 2i - j + 3k$ $b = i + j - k$, $c = 4k$ Encuentre:

a) $a + b, b + a$

b) $3a - 2b + 4c$

c) $|a + b|, |a| + |b|$

4) En cada caso encuentre la Resultante:

$p = i + 3j - k$, $q = 5i - 2k$, $u = -j + 3k$

5) Determine la fuerza p tal que p, $q = 3j - 4k$ y $u = i - j$ queden en equilibrio.

6) Sea $a = 2i + j + 3k$, $b = i - 4k$ y $c = 3i - j + 2k$ Encuentre.

a) $a..b, b.a$

b) $a + b + c$

c) $(a + b).c, a.c + b.c$

Vectores

7) ¿Son Ortogonales las diagonales de un Cubo, si no fuesen cual seria el Ángulo?

8) Sean los vectores los siguientes:

$$a = i + j + k \qquad b = -i + j \quad \text{y} \quad c = 3i + k$$

Encuentre el Coseno del Angulo entre los vectores siguientes:

a) a, b

b) a + b, c

9) Encuentre el Área del Paralelogramo que tiene como 2 de sus lados adyacentes a los vectores dados:

a) i, i+ j

b) i + 2j-k, j + k

Matrices

Matrices:

1) Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix},$$ Encontrar

a) A-B

b) A^T

c) $(C^T)^T$

d) $A+A^T$, $A-A^T$

e) $(A+B)^T$, A^T+B^T

f) Representar A-B como la suma de una Matriz Simétrica y una Antisimetrica.

Matrices

2) Sean

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Hallar:

a) $(3N)^T$, $3N^T$

b) K-M , M-K

c) Representar la matriz K como la suma de una Matriz Simétrica y una Antisimétrica.

d) KM

e) NK

3) Represente las Transformaciones en una Matriz.

$$3x + 5y + 7z = 3$$

$$-3x + 6y + 8z = 5$$

$$5x + 2y + 4z = 18$$

Matrices

4) Si **A** da los precios (en centavos/libra) de 2 artículos en tres tiendas y **x** da las cantidades (lb) que alguien desea comprar, ¿Que puede ver esta persona en y =**Ax?**

$$A = \begin{array}{cl} \begin{array}{cc} \text{Papas} & \text{Cebollas} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 15 & 9 \\ 8 & 14 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} Tienda I \\ Tienda II \\ Tienda III \end{array} \end{array} \qquad x = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} Papas \\ Cebollas \end{array}$$

Matrices (Determinantes)

Determinantes:

1) Calcular cada uno de los siguientes Determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

2) Si el Determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ Calcular el determinante de cada matriz.

a) $\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1.5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3) ¿Cuanto sale el valor de cada una de estas Determinante?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

Matrices (Determinantes)

4) Resolver aplicando la Regla de Cramer y la Eliminación de Gauss.

a)
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 9 \\ -x + 6y &= -3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 7 \\ 3x + 3z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

Derivadas

Derivadas Suma, Productos, Cocientes, Potencias:

a) Derivar las siguientes funciones:

$$y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6 \qquad y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$$

$$y = (1-5x)^6 \qquad y = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$y = \left(\frac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)^4$$

b) Derivar lo indicado en los problemas:

$$y = 3x^4 - 2x^2 + x - 5 \quad , \quad y^{111}$$

$$y = \sqrt{2 - 3x^2} \quad , \; y^{11}$$

$$y = x \big/ \sqrt{x-1} \quad , y^{11}$$

Derivadas

Hallar y^1 **en las siguientes Ecuaciones:**

$x^2y - xy^2 + y^2 = 0$

$x^2 - xy + y^2 = 3$

$x^3y + xy^3$

Derivadas de Funciones Trigonométricas, Logarítmicas, Exponenciales y Función Inversas.

$y = 3sen2x$ $\qquad$ $y = 4tag5x$

$y = 9\sec\frac{1}{3}x$ $\qquad$ $y = sen^2(3x - 2)$

$y = sen^3(2x - 3)$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}tagxsen2x$

$y = x^2senx + 2x\cos x - 2senx$

Derivadas

a) Demostrar lo siguiente:

$y^{11} + 4y = 0$ de donde $y = 3sen(2x+3)$

$y^{111} + y^{11} + y^{1} + y = 0$ de donde $y = senx + 2\cos x$

b) Si $x = Asenkt + B\cos kt$ siendo A, B, k constantes, demostrar que: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$

c) Hallar la derivada de las siguientes funciones:

$y = \ln(4x-5)$ $y = \ln\sqrt{3-x^2}$ $y = \ln(x^2+x-1)^3$

$y = \ln(\sec x + tagx)$ $y = e^{5x}$ $y = e^{sen3x}$

$y = arcsene^{x}$ $y = e^{-x}\cos x$ $y = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$

Derivadas

d) Si $y = e^{-2x}(sen2x + \cos 2x)$, demostrar que $y^{11} + 4y^{1} + 8y = 0$

e) Si $y = x^2 e^x$, demostrar que $y^{111} = \left(x^2 + 6x + 6\right)e^x$

Máximos y Mínimos

Máximos y Mínimos

Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

$$y = x^2 + \frac{250}{x}$$

$$y = x(12 - 2x)^2$$

Hallar el Máximo y el Mínimo Aplicando el criterio de la Primera Derivada:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$f(x) = 3 + 2x - x^2$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 8$$

Hallar el Máximo y el Mínimo Aplicando el criterio de la Segunda Derivada:

$$y = x^2 + \frac{250}{x}$$

$$y = x(12 - 2x)^2$$

Integrales

Integrales:

Resolver las siguientes Integrales:

$$\int \sqrt{6x-x^2}\,dx \qquad \int \cot^4 3x \csc^2 3x\,dx \qquad \int e^{-x^2+2}x\,dx \qquad \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}\,dx$$

$$\int\left(\frac{dx}{2x-1}-\frac{dx}{2x+1}\right) \qquad \int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x+3}} \qquad \int\sqrt{1+y^4}\,y^3\,dy$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^{1/3}}$$

Integrales

Problemas de Integrales:

1) Resolver:

$\int x.senxdx$ $\int \sec^3 xdx$ $\int x\cos xdx$ $\int \ln xdx$

$\int x.sen\frac{x}{2}dx$ $\int t^2e^{4t}dt$ $\int e^{2x}\cos 3xdx$ $\int \left(r^2+r+1\right)e^r dr$

$\int e^{\theta}sen\theta d\theta$ $\int e^{ax}senbxdx$

2) Hallar el volumen del Sólido generado al hacer girar, sobre el eje y, la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = e^x$ y la recta $x = \ln 2$.

Integrales

3) Resolver las Integrales Siguientes:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{9+y^2}} \qquad \int \frac{dx}{4+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{5dx}{\sqrt{25x^2-9}}$$

$$\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2} dw \qquad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales:

1) Clasifique cada una de las siguientes ecuaciones Diferenciales como Ordinarias ó Parciales; indique el orden de cada ecuación; y determine en cada caso si la ecuación en Lineal o no lineal.

a) $$\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = senx$$

b) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

c) $$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$$

d) $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$

e) $$\frac{d^6x}{dt^6} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) + x = t$$

Ecuaciones Diferenciales

2) Demuestre que cada una de las funciones definidas en la columna I es una solución de la ecuación diferencial correspondiente de la columna II, en cada intervalo a< x <b del eje x.

I	II
a) $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$
b) $f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$
c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3) Demuestre que $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $x\left({}^{dy}\!/\!_{dx}\right) + y = x^3y^3$ en el intervalo de 0<x<2.5.

Ecuaciones Diferenciales

4) En los siguientes ejercicios determinar si cada una de las ecuaciones dadas es ó no es exacta, resolver luego aquellas que sean exactas.

a) $(3x+2y)dx+(2x+y)dy=0$

b) $(3x^2y+2)dx-(x^3+y)dy=0$

c) $(y\sec^2 x+\sec x\tan x)dx+(\tan x+2y)dy=0$

d) $\left(\dfrac{x}{y^2}+x\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{y^3}+y\right)dy=0$

e) $\dfrac{2y^{3/2}+1}{x^{1/2}}dx+\left(3x^{1/2}y^{1/2}-1\right)dy=0$

5) Resolver los problemas de valor inicial de los ejercicios:

a) $(2xy-3)dx+(x^2+4y)dy=0 \qquad y(1)=2$

b) $(ye^x+2e^x+y^2)dx+(e^x+2xy)dy=0 \qquad y(0)=6$

6) Determinar la constante A tal que la ecuación sea exacta y resolverla luego.

$$(x^2+3xy)dx+(Ax^2+4y)dy=0$$

Ecuaciones Diferenciales

7) Resolver las Ecuaciones Diferenciales

a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} = 6x^2$

b) $xdy + (xy + y - 1)dx = 0$

c) $(\cos^2 x - y\cos x)dx - (1 + senx)dy = 0$

d) $dy + (4y - 8y^{-3})xdx = 0$

8) Resolver los problemas de valor inicial:

a) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 2x^4 \qquad y(2) = 8$

b) $e^x\left[y - 3(e^x + 1)^2\right]dx + (e^x + 1)dy = 0 \qquad y(0) = 4$

9) Considere la ecuación $a\left({dy}/{dx}\right) + by = ke^{-\lambda x}$ de donde a, b y k son constantes positivas y λ es una constante no negativa.

a) Resolver la ecuación.

b) Demuestre que si $\lambda = 0$ toda solución se aproxima a ${k}/{b}$ cuando $x \to \infty$, pero si $\lambda > 0$ toda solución se aproxima a 0 cuando $x \to \infty$.

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y Primer Grado, Bernoulli

a) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$

b) $xdx - \left\{y + xy^3\left(1 + \ln x\right)\right\}dx = 0$

c) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

d) $\dfrac{d\rho}{d\theta} + 3\rho = 2$

e) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

f) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$

h) $\dfrac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos\theta$

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales Exactas:

Seleccionar entre las siguientes ecuaciones las que son exactas y resolverlas:

a) $y(x-2y)dx - x^2 dy = 0$

b) $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy$

c) $(2x+3y+4)dx + (3x+4y+5)dy = 0$

d) $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\,dy = 0$

e) $(x+y+1)dx - (y-x-3)dy = 0$

Problemas de Ecuaciones Diferenciales

Problemas de Ecuaciones Diferenciales:

1) Una cierta sustancia química se convierte en otra mediante una reacción química. La rapidez con que la primera sustancia se convierte es proporcional a la cantidad de esta sustancia presente en cualquier instante. 10% de la cantidad original de la primera sustancia se ha transformado en 5 minutos.

a) Que porcentaje de la primera sustancia química se habrá convertido en 20 minutos.

b) En cuantos minutos se habrá convertido el 60% de la sustancia química.

2) Suponga que la población de una ciudad crece con una rapidez que es proporcional al número de habitantes en cualquier tiempo. Si la población se duplica en 40 años. En cuanto tiempo la población se triplicara.

Problemas de Ecuaciones Diferenciales

3) Un tanque inicialmente contiene 100 galones de salmuera en el que se han disuelto 20 libras de sal. Comenzando en tiempo $t=0$, la salmuera que contiene 3 lb de sal disuelta por galón entra al tanque en razón de 4 gal/min. La mezcla se conserva uniforme mediante agitación, y estando bien agitada sale simultáneamente del tanque con la misma rapidez.

a) Que cantidad de sal habrá después de 10 minutos.

b) Cuando se tendrá en el tanque 160 lb. de sal.